Correction du DST n°6

28/03/26

Exercice 1

1. La ligne 1 et la ligne 4 de A sont identiques, ainsi que les lignes 2 et 3, donc $\mathrm{rg}(A) < 4$ donc A n'est pas inversible.

2. (a) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. De plus ,

$$\begin{aligned} 4A^2 - 4A &= \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 12 & 8 & 8 & 4 \\ 12 & 8 & 8 & 4 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= A^3 \end{aligned}$$

(b) Pour $n = 1$ on peut écrire $A^1 = 0 \times A^2 + 1 \times A$ donc il suffit de poser $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$ pour avoir le résultat souhaité.

De même pour $n = 2$ on peut écrire $A^2 = 1 \times A^2 + 0 \times A$ donc il suffit de poser $a_2 = 1$ et $b_2 = 0$, et on a bien $a_2 = 4a_1 + b_1$ et $b_2 = -4a_1$.

Supposons que pour un entier naturel n non nul donné on ait $A^n = a_n A^2 + b_n A$, alors on a :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n \\ &= A(a_n A^2 + b_n A) \\ &= a_n A^3 + b_n A^2 \\ &= a_n(4A^2 - 4A) + b_n A^2 \\ &= (4a_n + b_n)A^2 - 4a_n A \end{aligned}$$

donc A^{n+1} peut s'écrire $a_{n+1}A^2 + b_{n+1}A$ en posant $a_{n+1} = 4a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -4a_n$.

Par principe de récurrence on en conclut qu'en posant $a_1 = 0$, $b_0 = 1$, et pour tout n non nul : $a_{n+1} = 4a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -4b_n$ on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = a_n A^2 + b_n A$$

(c) Soient a_0 et b_0 deux réels, on a :

$$\begin{aligned} A^0 = A_0 A^2 + b_0 A \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2a_0 & 0 & 02a_0 & \\ 3a_0 & 2a_0 & 2a_0 & a_0 \\ 3a_0 & 2a_0 & 2a_0 & a_0 \\ 2a_0 & 0 & 0 & 2a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 & 0 & 0 & b_0 \\ b_0 & b_0 & b_0 & 0 \\ b_0 & b_0 & b_0 & 0 \\ b_0 & 0 & 0 & b_0 \end{pmatrix} \\ \Longrightarrow \begin{cases} 2a_0 = b_0 \\ a_0 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

or $0 \times A^2 + 0 \times A = 0 \neq I$, donc il n'existe pas de réels a_0 et b_0 tels que $A^0 = a_0 A^2 + b_0 A$.

3. (a) Pour tout entier naturel n non nul on a par substitution :

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= 4a_{n+1} + b_{n+1} \\ &= 4a_{n+1} - 4a_n \end{aligned}$$

(b) D'après la question précédente (a_n) est une suite récurrence linéaire d'ordre 2, dont l'équation caractéristique est $r^2 = 4r - 4$.

$$\begin{aligned} r^2 = 4r - 4 &\iff r^2 - 4r + 4 = 0 \\ &\iff (r-2)^2 = 0 \\ &\iff r = 0 \end{aligned}$$

donc cette équation n'admet qu'une solution réelle $r_0 = 2$. On en déduit qu'il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \lambda 2^n + \mu n 2^n$$

On sait de plus que $a_1 = 0$ et $a_2 = 1$, donc :

$$\begin{cases} 2\lambda + 2\mu &= 0 \\ 4\lambda + 8\mu &= 1 \end{cases}$$

d'où $\mu = \frac{1}{4}$ et $\lambda = -\frac{1}{4}$. On en conclut que pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{4} n 2^n - \frac{1}{4} 2^n \\ &= n2^{n-2} - 2^{n-2} \\ &= (n-1)2^{n-2} \end{aligned}$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_{n+1} = -4a_n = -(n-1)2^n$ donc pour tout entier $n \geq 2$, $b_n = -(n-2)2^{n-1}$.

Pour $n = 1$ on a $b_1 = 1$ et $-(1-2)2^{1-1} = 1$ donc la formule marche aussi pour $n = 1$.

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} a_n &= (n-1)2^{n-2} \\ b_n &= -(n-2)2^{n-1} \end{cases}$$

4. Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\begin{aligned} A^n &= a_n A^2 + b_n A \\ &= (n-1)2^{n-2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - (n-2)2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

car

$$2(n-1)2^{n-2}-(n-2)2^{n-1}=2^{n-1}$$

et

$$3(n-1)2^{n-2}-(n-2)2^{n-1}=2^{n-2}[3(n-1)-2(n-2)]=(n+1)2^{n-2}$$

Exercice 2

1. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Pour toutes matrices $M=(m_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ et $N_{1\le i,j\le n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tous réels λ et μ, on a :

$$\begin{aligned}
\ell_i(\lambda M+\mu N) &= \sum_{j=1}^{n}(\lambda m_{i,j}+\mu n_{i,j}) \\
&= \lambda\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}+\mu\sum_{j=1}^{n} n_{i,j} && \text{par linéarité de la somme} \\
&= \lambda\ell_i(M)+\mu\ell_i(N)
\end{aligned}$$

   donc ℓ est bien une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$.

2. La matrice nulle est magique et sa somme est 0, donc $0_{\mathcal{E}_n(\mathbb{R})} \in \mathcal{K}_n$.

   Soient M et N deux matrices de $\mathcal{K}_n$ et λ et μ deux réels. Alors $\lambda M+\mu N$ est dans $\mathcal{E}_n(\mathbb{R})$ car $\mathcal{E}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (admis par l'énoncé), donc $\lambda M+\mu N$ est magique donc a une somme $s(\lambda M+\mu N)$ qui est égale à $\ell_i(\lambda M+\mu N)$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. Pour un i fixé, par exemple $i=1$, on a :

$$\begin{aligned}
\ell_1(\lambda M+\mu N) = \lambda\ell_1(M)+\mu\ell_1(N) \\
&= \lambda s(M)+\mu s(N) \\
&= 0 && \text{car } M \text{ et } N \text{ sont dans } \mathcal{K}_n
\end{aligned}$$

   donc $\lambda M+\mu N$ est aussi de somme nulle (il est inutile de vérifier les autres sommes puisque $\lambda M+\mu N$ est magique).

   On a donc bien $\lambda M+\mu N \in \mathcal{K}_n$, donc K_n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}_n(\mathbb{R})$.

   On pouvait aussi simplement remarquer que $\mathcal{K}_n$ est le noyau de la restriction de ℓ_1 à $\mathcal{E}_n(\mathbb{R})$.

3. Soit $M \in \mathcal{E}_n(\mathbb{R})$. Les colonnes de ${}^tM$ sont les lignes de M donc elles sont toutes de même somme, les lignes de ${}^tM$ sont les colonnes donc elles sont toutes de même somme, et les deux diagonales de ${}^tM$ sont les mêmes (en échangeant l'ordre des coefficients pour la deuxième diagonale) que celles de M, donc ont toutes deux la même somme, et toutes ces sommes sont égales. Autrement dit, pour tout i de $[\![1,n]\!]$ on a $c_i({}^tM)=\ell_i(M)$ et $\ell_i({}^tM)=c_i(M)$, et $d_1(t^M)=d_1({}^tM)$ et $d_2({}^tM)=d_2(M)$.

   On en déduit que pour tout $M \in \mathcal{E}_n(\mathbb{R})$, ${}^tM \in \mathcal{E}_n(\mathbb{R})$ et $s({}^tM)=s(M)$.

4. Soit $M \in \mathcal{E}_n(\mathbb{R})$. On peut remarquer que pour tout réel λ, $\lambda J_n \in \mathcal{E}_n$ et que $s(J_n)=n$ donc $s(\lambda J_n)=\lambda n$.

   Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a donc : $s(M-\lambda J_n)=\ell_1(M-\lambda J_n)=\ell_1(M)-\lambda\ell_1(J_n)=\ell_1(M)-\lambda n$.

   donc $M-\lambda J_n \in \mathcal{K}_n$ si et seulement si$\lambda=\dfrac{s(M)}{n}$. Il existe donc bien un unique réel λ tel que $M-\lambda J_n \in \mathcal{K}_n$.

5. On a

$$
\begin{aligned}
MW_n &= \begin{pmatrix} \ell_1(M) \\ \ell_2(M) \\ \vdots \\ \ell_n(M) \end{pmatrix} \\
&= s(M) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= s(M)W_n
\end{aligned}
$$

donc $MW_n - S(M)W_n = 0$ d'où $(M - s(M)I)W_n = 0$

6. A est bien magique de somme nulle, J est magique de somme 3 et S est magique de somme nulle.
7. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice fixée.

   Analyse : Supposons qu'il existe deux matrices M_1, M_2 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, avec M_1 antisymétrique et M_2 symétrique, telles que $M = M_1 + M_2$.

   Alors ${}^tM = {}^tM_1 + {}^tM_2 = -M_1 + M_2$, donc en écrivant la somme et la différence de ces deux égalités on obtient :

$$M + {}^tM = 2M_2 \quad \text{et} \quad M - {}^tM = 2M_1$$

   d'où $M_2 = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $M_1 = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$.

   Synthèse : Réciproquement, si on pose $M_1 = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$ et $M_2 = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$, alors on a bien $M_1 + M_2 = M$ et de plus :

$${}^tM_1 = \frac{1}{2}({}^tM - M) = -\frac{1}{2}(M - {}^tM) = -M_1$$

   donc M_1 est antisymétrique, et

$${}^tM_2 = \frac{1}{2}({}^tM + M) = M_2$$

   donc M_2 est symétrique.

   Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, il existe donc un unique couple (M_1, M_2) de matrices avec M_1 antisymétrique et M_2 symétrique telles que $M = M_1 + M_2$.
8. (a) Comme $M \in \mathcal{K}_3$ et ${}^tM \in \mathcal{K}_3$ d'après la question 3.

   Comme $\mathcal{K}_3$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}_n(\mathbb{R})$ il est stable par combinaison linéaire, donc $M_1 = \frac{1}{2}(M - {}^tM) \in \mathcal{K}_3$ et $M_2 = \frac{1}{2}(M + {}^tM) \in \mathcal{K}_3$.

   (b) Comme M_1 est antisymétrique, il existe trois réels a, b et c tels que :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

   de plus $M_1 \in \mathcal{K}_3$ donc M_1 est magique et $a+b = 0$, $-a+c = 0$, $-b-c = 0$, $-a-b = 0$, $a-c = 0$, $b+c = 0$,$0+0+0 = 0$, $-b + b = 0$. Toutes ces équations mènent à $a = -b$ et $a = c$, donc $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ -a & 0 & a \\ a & -a & 0 \end{pmatrix} = aA$.

   De même, M_2 est symétrique donc il existe six réels a, b, c, d, e, f tels que $M_2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$. Comme M_2 est magique de somme nulle on a :

$$\begin{cases} a+b+c &= 0 \\ b+d+e &= 0 \\ c+e+f &= 0 \\ a+d+f &= 0 \\ 2c+d &= 0 \end{cases}$$

donc $(L_4 \leftarrow L_4 - L_1)$ $\begin{cases} a+b+c &= 0 \\ b+d+e &= 0 \\ c+e+f &= 0 \\ d+f-b-c &= 0 \\ 2c+d &= 0 \end{cases}$

donc $(L_4 \leftarrow L_4 + L_2)$ et $L_5 \leftarrow L_5 - 2L_3)$ $\begin{cases} a+b+c &= 0 \\ b+d+e &= 0 \\ c+e+f &= 0 \\ 2d+e+f &= 0 \\ d-2e-2f &= 0 \end{cases}$

d'où enfin : $\begin{cases} a+b+c &= 0 \\ b+d+e &= 0 \\ c+e+f &= 0 \\ d-2e-2f &= 0 \\ 5e+5f &= 0 \end{cases}$

donc $e=-f$ d'où $c=d=0$, $b=-e$ et $a=-b=e=-f$. Ainsi : $M_2 = \begin{pmatrix} a & -a & 0 \\ -a & 0 & a \\ 0 & a & -a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Donc il existe bien un réel α et un réel β tels que $M_1 = \alpha A$ et $M_2 = \beta S$

(c) D'après les questions 8a et 8b, toute matrice M de $\mathcal{K}_3$ peut s'écrire sous la forme $M = \alpha A + \beta S$ avec A et S qui sont bien dans $\mathcal{K}_3$ d'après la question 6, donc $K_3 = \text{Vect}\,(A,S)$.

De plus, (A,S) forme une famille libre (deux vecteurs non colinéaires) donc c'est une finalement une base de $\mathcal{K}_3$.

D'après la question 4, pour toute matrice M de $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$ il existe un réel λ tel que $M - \lambda J \in \mathcal{K}_3$. Une fois un tel λ fixé, il existe donc deux réels α et β tels que $M - \lambda J = \alpha A + \beta S$. Ainsi $M = \alpha A + \lambda J + \beta S$, donc (A,J,S) est une famille génératrice de $\mathcal{E}_3$. Montrons qu'elle est libre : soient λ_1, λ_2 et λ_3 tels que $\lambda_1 A + \lambda_2 J + \lambda_3 S = 0$, alors

$$\begin{pmatrix} \lambda_2+\lambda_3 & \lambda_1+\lambda_2-\lambda_3 & \lambda_2-\lambda_3 \\ \lambda_2-\lambda_1-\lambda_3 & \lambda_2 & \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 \\ \lambda_1+\lambda_2 & \lambda_2+\lambda_3-\lambda_1 & \lambda_2-\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où $\lambda_2 = 0$ grâce au coefficient du milieu, puis $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ par liberté de la famille (A,S).

On en conclut que (A,J,S) est bien une base de $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 3

1. Notons B_k l'événement « la k-ème boule tirée par A est blanche »

   $[X=0]$ est réalisé si et seulement si la première boule tirée par A est blanche, donc $P(X=0) = P(B_1) = \frac{1}{2}$

   $[X=1]$ est réalisé si et seulement si la première boule tirée par A est noire et la deuxième est blanche, donc :

$$P(X=1) = P(\overline{B_1} \cap B_2) = P(\overline{B_1}) \times P_{\overline{B_1}}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

   car si la première boule tirée est noire il n'y a plus que 2 boules blanches et 1 noire lors du second tirage, donc une probabilité de $\frac{2}{3}$ de tirer une boule blanche.

   Enfin, $[X=2]$ est réalisé si et seulement si les deux première boules tirées par A sont noires :

$$P(X=2) = P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) = P(\overline{B_1}) \times P_{\overline{B_1}}(\overline{B_2}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

2. X est finie donc admet une espérance et une variance.

$$\begin{aligned}E(X) &= 0 \times P(X=0) + 1 \times P(X=1) + 2 \times P(X=2)\\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{6}\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}E(X^2) &= 0^2 \times P(X=0) + 1^2 \times P(X=1) + 2^2 \times P(X=2)\\ &= \frac{1}{3} + \frac{4}{6}\\ &= 1\end{aligned}$$

donc d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

3. La famille d'événements $([X=0],[X=1],[X=2])$ forme un système complet d'événements donc :

$$\begin{aligned}P(Y=0) &= P(X=0) \times P_{[X=0]}(Y=0) + P(X=1) \times P_{[X=1]}(Y=0) + P(X=2) \times P_{[X=2]}(Y=0)\\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times 1\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

en effet, lorsque B commence à tirer, si $X=0$ alors l'urne contient 1 boule blanche et 2 noires, si $X=1$ alors elle contient 1 boule blanche et 1 noire, et si $X=2$ alors elle contient 1 boule blanche et 0 noire, ce qui donne respectivement $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, et1 comme probabilité pour B de tirer une boule blanche dès le premier coup, c'est à dire de réaliser l'événement $[Y=0]$.

4. Une fois que le joueur A a fini de piocher, si la proportion de boules blanches restantes est p et la proporition de boules noires est $1-p$, avec $p \in [0,1]$, alors l'événement $[Y=i]$ est réalisé avec probabilité $p \times (1-p)^i$: en effet, il est réalisé si et seulement si le joueur B tire une boule noire i fois de suite suivie d'une boule blanche et les tirages sont indépendants les uns des autres.

   Pour tout entier naturel i non nul, on a donc :

$$\begin{aligned}P([X=0] \cap [Y=i]) &= P(X=0) \times P_{[X=0]}(Y=i)\\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^i\\ &= \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{3}\right)^i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P([X=1] \cap [Y=i]) &= P(X=1) \times P_{[X=1]}(Y=i)\\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^i\\ &= \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{2}\right)^i\end{aligned}$$

Si $[X = 2]$ est réalisé, alors il ne reste plus que des boules blanches dans l'urne donc $Y = 0$ avec probabilité 1. On a donc :

$$P([X = 2] \cap [Y = i]) = \begin{cases} P(X = 2) & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

5. L'urne contient 2 boules noires au départ X doit forcément prendre une valeur entière entre 0 et 2, donc $[X = 0] \cup [X = 1] \cup [X = 2] = \Omega$.

   De plus, X ne peut pas prendre deux valeurs distinctes simultanément donc si $i \neq j$ avec $i, j \in \{0, 1, 2\}$, on a $[X = i] \cap [X = j] = \varnothing$.

   La famille $([X = 0], [X = 1], [X = 2])$ est donc un système complet d'événements.
6. On applique la formule des probabilités totales au système complet d'événements $([X = 0], [X = 1], [X = 2])$:

$$\begin{aligned} \forall i \in \mathbb{N}^*, \quad P(Y = i) &= \sum_{j=0}^{2} P([X = j] \cap [Y = i]) \\ &= \frac{1}{6} \times \left[\left(\frac{2}{3}\right)^i + \left(\frac{1}{2}\right)^i + 0 \right] \end{aligned}$$

   et si $i = 0$, alors $P(Y = 0) = \frac{1}{6} \times \left[\left(\frac{2}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^0 + 1 \right] = \frac{1}{2}$. La formule précédente donne pour $i = 0$:

$$\frac{1}{6} \times \left[\left(\frac{2}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^0 \right] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2}$$

   donc elle n'est donc valable pour tout entier i.

   Finalement :

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N}, \quad P(Y = i) = \begin{cases} \frac{1}{6} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^i + \left(\frac{1}{2}\right)^i \right] & \text{si } i > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } i = 0 \end{cases}}$$

7. Le terme général $P(Y = i)$ est une somme de termes de suites géométriques convergentes (car $|\frac{2}{3}| < 1$ et $|\frac{1}{2}| < 1$), multipliés par des constantes réelles, donc $\sum P(Y = i)$ converge.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{+\infty} P(Y = i) &= \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{6} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^i + \left(\frac{1}{2}\right)^i \right] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{9} \sum_{i'=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{i'} + \frac{1}{12} \sum_{i'=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{i'} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{9} \times \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} + \frac{1}{12} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \\ &= 1 \end{aligned}$$

8. Y admet ene espérance si et seulement si la série de terme général $iP(Y=i)$ converge absolument, donc si et seulement si $\sum_{i\geq 1} \frac{i}{6}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^i + \left(\frac{1}{2}\right)^i\right]$ converge (c'est équivalent car elle est à termes positifs).

   Pour tout entier naturel $N \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} \frac{i}{6}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^i + \left(\frac{1}{2}\right)^i\right] &= \frac{1}{6}\times\frac{2}{3}\times\sum_{i=1}^{N} i\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times\sum_{i=1}^{N} i\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{9}\times\frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2} + \frac{1}{12}\times\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

   car les séries de terme général $i\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}$ et de terme général $i\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$ convergent en tant que séries géométriques dérivées, car $|\frac{2}{3}| < 1$ et $|\frac{1}{2}| < 1$.

   On en conclut que Y admet une espérance et que $E(Y) = \dfrac{4}{3}$

9. Pour tout entier naturel $k \in \{0, ..., n\}$, l'événement $[X = k]$ est réalisé si et seulement si le joueur A a tiré k boules noires suivie d'une boule blanche, donc si $\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \cdots \cap \overline{B_k} \cap B_{k+1}$ est réalisé.

$$\begin{aligned}P(X=k) &= P(\overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{B_k}\cap B_{k+1}) \\ &= P(\overline{B_1})\times P_{\overline{B_1}}(B_2)\times\cdots\times P_{\overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{B_{k-1}}}(\overline{B_k})\times P_{\overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{B_k}}(B_{k+1}) \\ &= \frac{n}{n+b}\times\frac{n-1}{n+b-1}\cdots\times\frac{n-k+1}{n+b-k+1}\times\frac{b}{n-k+b} \\ &= \frac{\frac{n!}{(n-k)!}\times b}{\frac{(n+b)!}{(n+b-k-1)!}} \\ &= \frac{n!(n+b-k-1)!b}{(n-k)!(n+b)!}\end{aligned}$$

   et si on compare avec l'expression donnée :

$$\begin{aligned}\frac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}} &= \frac{\frac{(n-k+b-1)!}{(b-1)!(n-k)!}}{\frac{(n+b)!}{b!n!}} \\ &= \frac{(n-k+b-1)!b!n!}{(b-1)!(n-k)!(n+b)!} \\ &= \frac{n!(n-k+b-1)!b}{(n-k)!(n+b)!}\end{aligned}$$

   donc on a bien

$$P(X=k) = \frac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}}$$

10. On sait que X est une variable aléatoire finie et $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ donc :

$$1 = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)$$

   ce qui donne en remplaçant avec l'expression trouvée à la question précédente :

$$\begin{aligned}1 &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}} \\ &= \frac{1}{\binom{n+b}{b}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+b-1}{b-1}\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+b-1}{b-1} = \binom{n+b}{b}$$

On peut ensuite poser le changement de variable $k' = n - k$ ce qui donne :

$$\sum_{k'=0}^{n} \binom{k'+b-1}{b-1} = \binom{n+b}{b}$$

qui est bien l'égalité demandée. Il suffit de poser $a = b - 1$ pour obtenir ensuite la formule $\mathcal{S}$.

11. On a d'une part $k\binom{k+a}{a} = k\dfrac{(k+a)!}{a!k!} = \dfrac{(k+a)!}{a!(k-1)!}$ et d'autre part $(a+1)\binom{k+a}{a+1} = (a+1)\dfrac{(k+a)!}{(a+1)!(k-1)!} = \dfrac{(k+a)!}{a!(k-1)!}$, on en déduit donc l'égalité :

$$k\binom{k+a}{a} = (a+1)\binom{k+a}{a+1}$$

puis on en déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} k\binom{k+a}{a} &= 0 + \sum_{k=1}^{N} k\binom{k+a}{a} \\ &= \sum_{k=1}^{N} (a+1)\binom{k+a}{a+1} && \text{grâce à la formule} \\ &= (a+1)\sum_{k=1}^{N} \binom{k+a}{a+1} \\ &= (a+1)\sum_{k=0}^{N-1} \binom{k+a+1}{a+1}\end{aligned}$$

12. D'après la formule de transfert, $E(n-X) = \sum_{k=0}^{n}(n-k)P(X=k)$. On a donc :

$$
\begin{aligned}
E(n-X) &= \sum_{k=0}^{n}(n-k)\frac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}} \\
&= \frac{1}{\binom{n+b}{b}}\sum_{k=0}^{n}(n-k)\binom{n-k+b-1}{b-1} \\
&= \frac{1}{\binom{n+b}{b}}\sum_{k'=0}^{n}k'\binom{k'+b-1}{b-1} && \text{en posant } k'=n-k \\
&= \frac{1}{\binom{n+b}{b}}\times(b-1+1)\times\sum_{k=0}^{n-1}\binom{k+b}{b} && \substack{\text{en appliquant la formule précédente}\\ \text{en posant } a=b-1 \text{ et } N=n} \\
&= \frac{1}{\binom{n+b}{b}}\times b\times\binom{n+b}{b+1} && \text{en appliquant } \mathcal{S} \text{ avec } a=b \text{ et } N=n-1 \\
&= \frac{b\times\binom{n+b}{b+1}}{\binom{n+b}{b}} \\
&= b\times\frac{(n+b)!}{(b+1)!(n-1)!}\times\frac{b!n!}{(n+b)!} \\
&= \frac{nb}{b+1}
\end{aligned}
$$

On en déduit par linéarité que $n-E(X)=E(n-X)=\dfrac{nb}{b+1}$ donc que $E(X)=n-\dfrac{nb}{b+1}=\dfrac{n}{b+1}$.